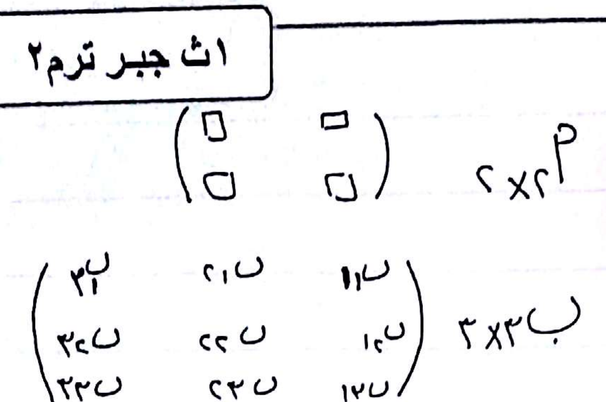

الأدهم
الجبر وحساب المثلثات
الصف الاول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى
اسم الطالب /
المدرســـــة /
الفصـــــل /
إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الدرس الاول
تنظيم البيانات فى مصفوفات

* إذا كانت المصفوفة $ن_{م \times ن}$
فإن عدد الصفوف = م
عدد الأعمدة = ن

١- يعنى $أ_{٣ \times ٢}$
بها ٣ صفوف ٢ أعمدة
وعدد عناصرها = ٣ × ٢ = ٦



بعض المصفوفات الخاصة

١ مصفوفة الصف

أ = (٢ ٣ ٠)

يحتوى على صف واحد $أ_{١ \times ٣}$

٢ مصفوفة العمود

س = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$ يحتوى على عمود واحد

$س_{٢ \times ١}$

٣ المصفوفة المربعة

مصفوفة فيها عدد الصفوف = الأعمدة

٣ المصفوفة الصفرية

رمزها ▭

$▭_{٢ \times ٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix} \Leftarrow ▭_{٢ \times ١}$

٤ المصفوفة القطرية

هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسى يكون أحدها على الأقل ≠ صفر

$م = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$

$ع = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

$ل = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

٥ مصفوفة الوحدة (I)

مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيس = ١

$I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

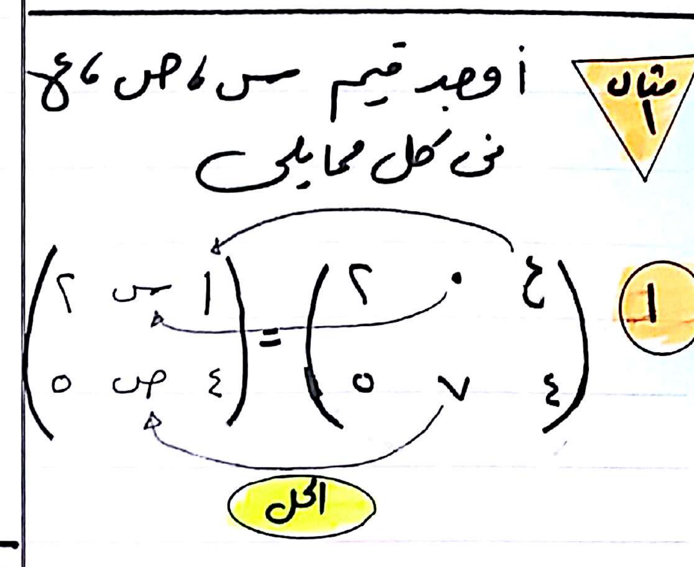
تساوي مصفوفتين

المصفوفة أ = المصفوفة ب إذا تحقق الشرطان

١) أ ، ب لهما نفس النظم

٢) يتساوى كل عنصر من أ مع نظيره من ب

مثال ١ أوجد قيم س ، ص ، ع في كل مما يلي



١) $\begin{pmatrix} ع & ٠ & ٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & س & ٢ \\ ٤ & ص & ٥ \end{pmatrix}$

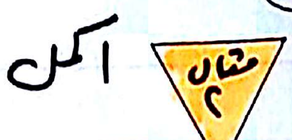
الحل

ع = ١ ، س = ٠ ، ص = ٧

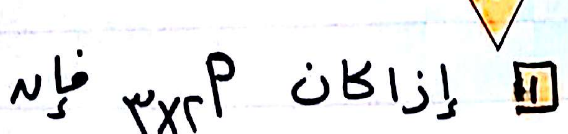
مدور المصفوفة

$أ = (أ_{ص ع})$ ، $أ^{مد} = (أ_{ع ص})$

$(أ^{مد})^{مد} = أ$



مثال ٢ أكمل



١) إذا كان $أ_{٢×٣}$ فإن $أ^{مد}$ تكون على النظم ...... ٣×٢

بتبديل الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف

مثال ٣ إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ فأوجد $أ^{مد}$

الحل

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$

المصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة

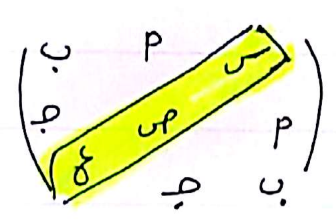
إذا كانت أ مصفوفة مربعة

١) أ متماثلة إذا كان $أ = أ^{مد}$

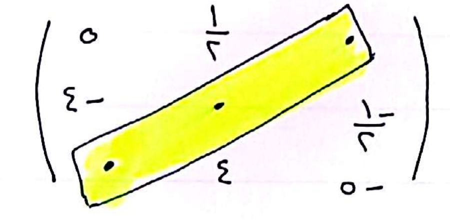
٢) أ شبه متماثلة إذا كان $أ = -أ^{مد}$


ملاحظات

١ المصفوفة المتماثلة تكون عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي



٢ المصفوفة شبه المتماثلة جميع عناصر قطرها الرئيسي أصفار ويكون تماثل العناصر حوله بعكس الإشارة




٣ أي مصفوفة قطرية تكون متماثلة

مثال ٤

إذا كانت

$$أ = \begin{pmatrix} ١ & س & ٣ \\ ٢ص & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٦ & ١ \end{pmatrix}$$

متماثلة فأوجد س، ص


الحل

∵ أ متماثلة ∴ هنلاقي تماثل حول القطر الرئيسي "إزاي يعني"

س = ٤

٢ص = ٦   ص = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

مثال ٥

إذا كانت

$$ب = \begin{pmatrix} ٧ & ٢س & ٠ \\ ٥ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ص+ع & ص \end{pmatrix}$$

فأوجد قيمة س، ص، ع

الحل

ب شبه متماثلة يعني هنغير الإشارة

∴ ٢س = -٤   س = $\frac{-٤}{٢}$

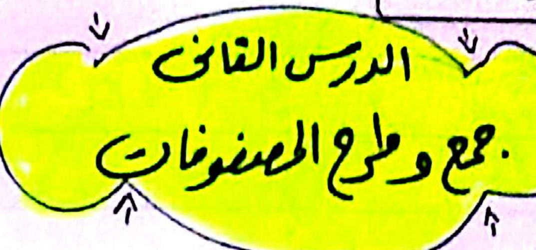
∴ س = -٢

ص = -٧

ص + ع = -٥

-٧ + ع = -٥

ع = -٥ + ٧   ع = ٢



مثال

إذا كانت

$أ = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -١ & -٢ \\ ٥ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

، $ج = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & -١ \\ ٣ & ٤ & ٦ \end{pmatrix}$

فأوجد

١ $٢أ + ج^{مد}$

الحل

$$٢\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ \\ -١ & ٦ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٦ & ١٠ \\ ٨ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ \\ -١ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٦ & ١٤ \\ ٧ & ١٠ \end{pmatrix}$$

٢ $٢ب + ج^{مد}$

الحل

خواص عملية الجمع

١ الانغلاق

إذا كانت $أ_{م×ن}$ ، $ب_{م×ن}$

فإن $أ+ب$ يكون من النظم $م×ن$

٢ الإبدال

$أ + ب = ب + أ$

٣ الدمج

$(أ+ب)+ج = أ+(ب+ج)$

٤ المحايد الجمعي $\square$

$أ + \square = \square + أ = أ$

٥ المعكوس الجمعي

$أ + (-أ) = (-أ) + أ = \square$

ملحوظة

$(أ+ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

$(أ^{مد})^{مد} = أ$

طرح المصفوفات ليست ابدالية وليست دامجة

مثال ٢

إذا كانت

$أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

، $ج = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ فأوجد

(١) ٢أ + ٣ج - ٢ب

الحل

$$٢\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix} + ٣\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & -٦ \\ -٤ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & ٩ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ١٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤+٦-٠ & -٦+٩-٤ \\ -٤+٣-١٠ & ٠+٦-٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & -١ \\ -١١ & ٦ \end{pmatrix}$$

(٢) ٢ب - أ + ٥ج

الحل

مثال ٣

إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$

، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التي تحقق

(١) ٣س - أ = ٢ب

الحل

٣س = ٢ب + أ

س = $\frac{١}{٣}$ [٢ب + أ]

$$س = \frac{١}{٣}\left[٢\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{١}{٣}\left[\begin{pmatrix} ٦+٣ & ٢+٢ \\ ١٤+١ & ٨+٥ \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ٩ & ٤ \\ ١٥ & ١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٩}{٣} & \frac{٤}{٣} \\ \frac{١٥}{٣} & \frac{١٣}{٣} \end{pmatrix}$$

(٢) ٣س - ٢ب = ٣أ

الحل

مثال ٤

إذا كانت $\text{س} + 2\,\text{ص}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة ص

الحل

$\because \text{س} + 2\,\text{ص}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 13 & 6 \end{pmatrix} \Leftarrow ①$

بأخذ المدور للطرفين

$(\text{س} + 2\,\text{ص}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}^{\text{مد}}$

$\text{س}^{\text{مد}} + 2\,\text{ص} = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 14 & 6 \end{pmatrix} \Leftarrow ②$

بضرب المعادلة ٢ × (-٢) والجمع

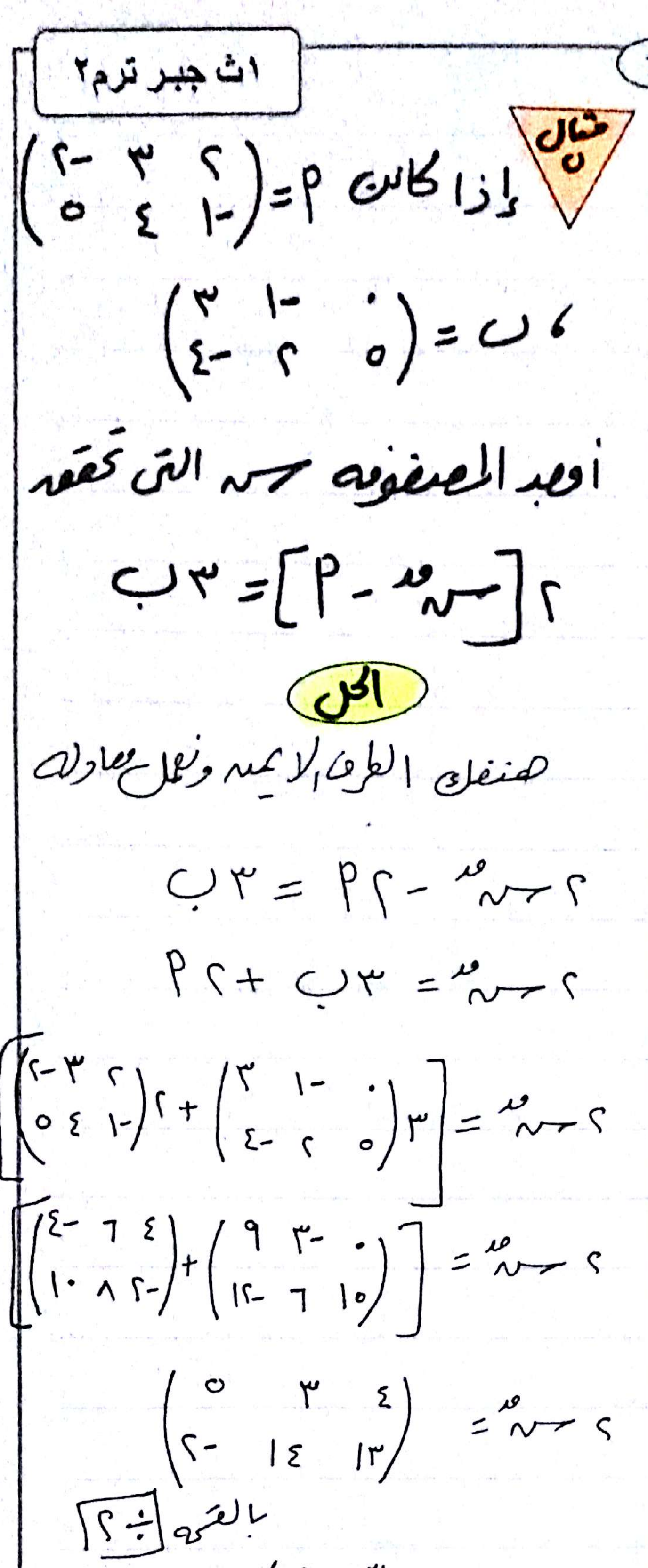
$\text{س} + 2\,\text{ص}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 13 & 6 \end{pmatrix} \leftarrow ①$

$-4\,\text{ص} - 2\,\text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -18 & -26 \\ -28 & -12 \end{pmatrix} \leftarrow ②$

$-3\,\text{ص} = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -15 & -6 \end{pmatrix}$

بالقسمة على -3

$\text{ص} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$



مثال ٥

إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة ص التي تحقق

$2\left[\text{ص}^{\text{مد}} - \text{أ}\right] = 3\,\text{ب}$

الحل

هنفك الطرف الأيمن ونكمل معادلة

$2\,\text{ص}^{\text{مد}} - 2\,\text{أ} = 3\,\text{ب}$

$2\,\text{ص}^{\text{مد}} = 3\,\text{ب} + 2\,\text{أ}$

$2\,\text{ص}^{\text{مد}} = \left[3\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right]$

$2\,\text{ص}^{\text{مد}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 15 & 6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}\right]$

$2\,\text{ص}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 13 & 14 & -2 \end{pmatrix}$

بالقسمة $\div 2$

$\text{ص}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & 7 & -1 \end{pmatrix}$

بأخذ المدور

$\therefore \text{ص} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{13}{2} \\ \frac{3}{2} & 7 \\ \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}$

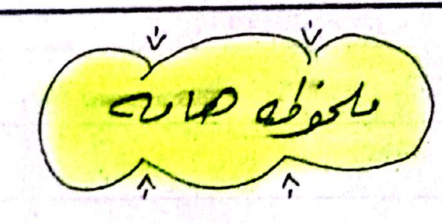
الدرس الثالث
ضرب المصفوفات

شرط ضرب مصفوفتين أ ، ب يكون
عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

$أ_{م×ن} × ب_{ن×ل} = ج_{م×ل}$

$أ_{٢×٣} × ب_{٣×٢} = ج_{٢×٢}$

$أ_{م×ن} × ب_{ن×م} = ج_{م×م}$



$(أ+ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

$(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$



إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١- & ٠ \\ ٣ & ١ & ٢- \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٠ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فأوجد أ ب

الحل

∵ عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

∴ الضرب ممكنه

$أ_{٢×٣} × ب_{٣×٢} = ج_{٢×٢}$

$أ ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١- & ٠ \\ ٣ & ١ & ٢- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٠ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٦+١+٠ & ٤+٠+٠ \\ ٩-١-٨ & ٦+٠-١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٠ & ٤- \end{pmatrix}$

مثال ٢

$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٢- \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ ١- & ٢ & ٤- \end{pmatrix}$

أوجد أ ب إن أمكن

الحل

عدد أعمدة الأولى = ٣

عدد صفوف الثانية = ٢

∴ عملية الضرب غير ممكنة ∴ أ ب غير معرفة

مثال ٣

$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$ب = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٤- \end{pmatrix}$

أوجد ① أ ب
② ب أ

٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

خواص عملية ضرب المصفوفات

١ الدمج :

$(\text{أ}\,\text{ب})\,\text{ج} = \text{أ}\,(\text{ب}\,\text{ج})$

٢ المحايد الضربي :

$\text{أ}\,I = I\,\text{أ} = \text{أ}$

٣ توزيع الضرب على الجمع :

$\text{أ}\,(\text{ب} + \text{ج}) = \text{أ}\,\text{ب} + \text{أ}\,\text{ج}$

ملحوظة

١ ضرب المصفوفات ليست إبداليه

$\text{أ}\,\text{ب} \neq \text{ب}\,\text{أ}$

٢ $(\text{أ}\,\text{ب})^{\text{مد}} = \text{ب}^{\text{مد}}\,\text{أ}^{\text{مد}}$

$(\text{أ}\,\text{ب}\,\text{ج})^{\text{مد}} = \text{ج}^{\text{مد}}\,\text{ب}^{\text{مد}}\,\text{أ}^{\text{مد}}$

$(\text{أ}\,\text{ب}\,\text{ج}\,\text{د})^{\text{مد}} = \text{د}^{\text{مد}}\,\text{ج}^{\text{مد}}\,\text{ب}^{\text{مد}}\,\text{أ}^{\text{مد}}$

مثال ٤

إذا كانت

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$$

$$\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٩ & ٣ \end{pmatrix}$$

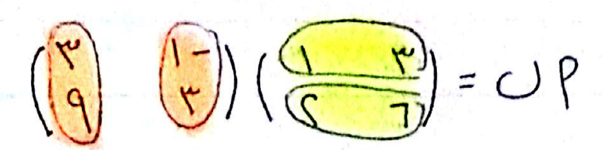
فأوجد كلاً من



١ أ ب

الحل

$\text{أ}_{٢\times٢} \times \text{ب}_{٢\times٢}$ يعني ممكنه



$$\text{أ}\,\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٩ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٩+٩ & ٣+٣- \\ ١٨+١٨ & ٦+٦- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٨ & ٠ \\ ٣٦ & ٠ \end{pmatrix}$$

٢ ب أ

٣ $(\text{أ} + \text{ب})\,\text{أ}$

مثال

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 5 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق أن

$15\, س^{مد} = أ^2 + (ب ج)^{مد}$

الحل

الأول هنجيب $أ^2$ ، $(ب ج)$

$أ^2 = أ \times أ = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4+3 & -2-5 \\ -6-15 & 3+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -21 & 28 \end{pmatrix}$

$(ب ج) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 5 & -7 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2-15+18 & 6+6+24 \\ 5+35+12 & -15-14+16 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 36 \\ 52 & -13 \end{pmatrix}$

$(ب ج)^{مد} = \begin{pmatrix} 1 & 52 \\ 36 & -13 \end{pmatrix}$

$\therefore 15\, س^{مد} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -21 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 52 \\ 36 & -13 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 & 45 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$

بالقسمة على ١٥

$\therefore س^{مد} = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

بأخذ المدور للطرفين

$\therefore س = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

مثال ٦

إذا كان $أ^{مد} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

فأثبت أن $أ^2 - 5أ + 22 I = \square$

الحل

$\because أ^{مد} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \therefore أ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$أ^2 = أ \times أ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4-16 & 8+12 \\ -8-12 & -16+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 20 \\ -20 & -7 \end{pmatrix}$

$أ^2 - 5أ + 22 I =$

$\begin{pmatrix} -12 & 20 \\ -20 & -7 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + 22 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -12-10+22 & 20-20+0 \\ -20+20+0 & -7-15+22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

الدرس الرابع
المحددات

$$\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$$

△ قيمة المحدد = القطر الرئيسي − القطر الفرعي

$(أ \times د) - (ب \times جـ)$



أوجد قيمة كلاً مما يلي

① $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = (2 \times 8) - (3 \times 5)$

$= 16 - 15 = 1$

② $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (3 \times 1) - (-2 \times 5)$

$= 3 + 10 = 13$

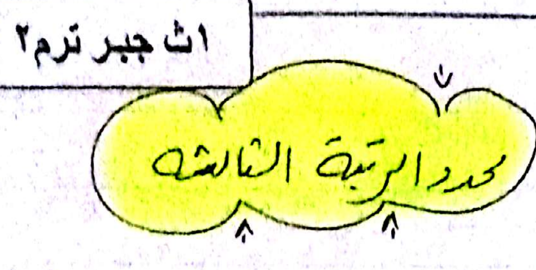
③ $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (2 \times -3) - (-1 \times 0)$

$= -6$

④ $\begin{vmatrix} جا\theta & جتا\theta \\ -جتا\theta & جا\theta \end{vmatrix} = (جا\theta \times جا\theta) - (جتا\theta \times -جتا\theta)$

$= جا^2\theta + جتا^2\theta = 1$

متطابقة مثلثية



قاعدة الاشارات

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ممكن نفك بأى صف أو عمود

مثال ٢: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

الحل

$= 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2[(0 \times -3) - (1 \times 4)] - 3[(-2 \times -3) - (4 \times 1)]$

$+ (-1)[(-2 \times 1) - (0 \times 1)]$

$= -12$

طريقة أبو أدهم أحلى

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$= [(2 \times 0 \times -3) + (3 \times 4 \times 1) + (-1 \times -2 \times 1)]$

$- [(-1 \times 0 \times 1) + (2 \times 4 \times 1) + (3 \times -2 \times -3)]$

$= 14 - 26 = -12$

محدد المصفوفة الثلاثية

| ١ ٠ ٤ |
| ٠ ٣ ٢ |
| ٠ ٠ ٥ | = ١ × ٣ × ٥ = ١٥

| ٢ ٠ ٠ |
| ٠ -١ ٠ |
| ٤ ١ -٣ | = ٢ × -١ × -٣
= ٦

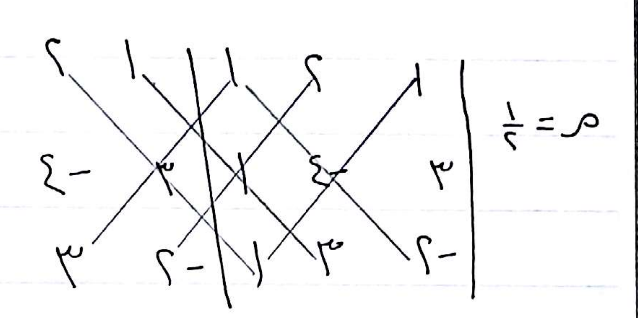
مثال ٣ إيجاد مساحة ∆ باستخدام المحددات

أوجد باستخدام المحددات مساحة المثلث الذي رؤوسه (١، ٢) ، (٣، -٤) ، (-٢، ٣)

الحل

س ص ١

م = ½ | ١ ٢ ١ |
| ٣ -٤ ١ |
| -٢ ٣ ١ |



= ½ [(١ × -٤ × ١) + (٢ × ١ × -٢) + (١ × ٣ × ٣)] − [(٢ × ٣ × ١) + (١ × ١ × ٣) + (١ × -٤ × -٢)]

= ½ [-١ - ١٧]

= ½ × -١٦ = -٨

= |-٨| = ٨ وحدات مربعة

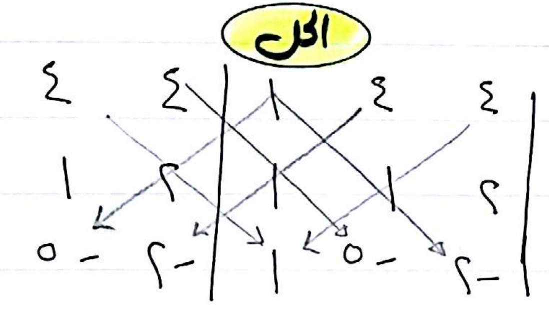
لأنه مفيش مساحة بالسالب

مثال ٤ باستخدام المحددات أوجد مساحة ∆ الذي رؤوسه (٣، ٤) ، (-٢، ٤) ، (٠، -٢)

لإثبات أن ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة لازم قيمة المحدد = صفر

مثال ٥ باستخدام المحددات أثبت أن (٤، ٤) ، (٢، ١) ، (-٢، -٥) تقع على استقامة واحدة

الحل



= [٤ − ٨ − ١٠] − [٨ − ٢٠ − ٢]

= -١٤ + ١٤ = صفر

∴ النقط تقع على استقامة واحدة

ولو مش مصدقني أسألهم

حل المعادلات بطريقة كرامر (المحددات)



حل بطريقة كرامر [المحددات] المعادلتين

٦س - ٥ص = -٢٣

، ٣س + ٣ص = ١٦

الحل

ركز فى ترتيب الخطوات

① Δ محدد المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 15 = 33$$

② $\Delta_{س}$ نضع الحد المطلق بدلاً من س

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -23 & -5 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} = -69 + 80 = 11$$

③ $\Delta_{ص}$ نضع الحد المطلق بدلاً من ص

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} 6 & -23 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} = 96 + 69 = 165$$

فى الآخر هنقول

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{165}{33} = 5$$

م.ح = $\{(\frac{1}{3} ، 5)\}$

مثال ٧ حل المعادلات التالية بكرامر

٣ص + ٢س = ع + ١

٣س + ٢ع = ٨ - ٥ص

٣ع - ١ = س - ٢ص

الحل

دى طويلة بس لذيذة

ركز معايا ⇐ الاول هنرتب المعادلات

س ص ع = حد مطلق

٢س + ٣ص - ع = ١

٣س + ٥ص + ٢ع = ٨

س - ٢ص - ٣ع = -١

هنجيب ① Δ محدد المعاملات

② $\Delta_{س}$ نحط الحد المطلق بدلاً من س

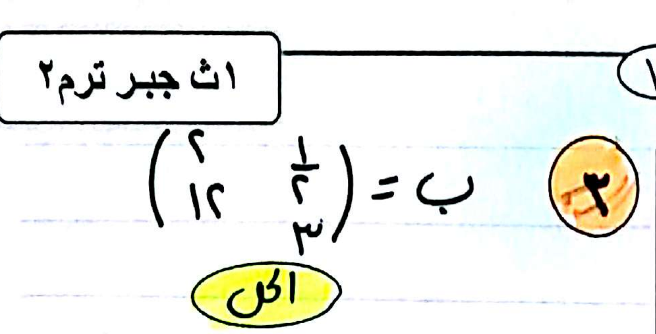
③ $\Delta_{ص}$ نحط الحد المطلق بدلاً من ص

④ $\Delta_{ع}$ نحط الحد المطلق بدلاً من ع

ونقول $س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta}$

$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$

، $ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta}$



مثال ١

أوجد المعكوس الضربي إذا كان له وجود لكل من المصفوفتين:

(١) $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix} = (-٢ \times -٤) - (٢ \times ٣)$

$= ٨ - ٦ = ٢ \neq ٠$

$\text{أ}^{-1} = \frac{١}{\Delta}$ (نبدل أماكن القطر الرئيسي ونغير إشارة الفرعي)

$\text{أ}^{-1} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -٤ & -٢ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ -\frac{٣}{٢} & -١ \end{pmatrix}$

(٢) $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$

الحل

(٣) $\text{ب} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & ١٢ \end{pmatrix}$

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & ١٢ \end{vmatrix} = (\frac{١}{٢} \times ١٢) - (٢ \times ٣)$

$= ٦ - ٦ = \text{صفر}$

∴ المصفوفة ليس لها معكوس ضربي لأنه $\frac{١}{\Delta} = \frac{١}{\text{صفر}}$ غير معرف

ملحوظة: لا يكون للمصفوفة معكوس ضربي إذا كانت $\Delta = \text{صفر}$

مثال ٢

أوجد قيم س التي تجعل للمصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٣ \\ ١٢ & \text{س} \end{pmatrix}$ معكوس ضربي

الحل

$|\text{أ}| \neq ٠$ نحل $= ٠$ الأول وبعدين نستبعد

$\begin{vmatrix} \text{س} & ٣ \\ ١٢ & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س}^٢ - ٣٦ = ٠$

$(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٦) = ٠$

س = ٦ أو س = -٦

∴ المصفوفة لها معكوس ضربي عندما

$\text{س} \in \text{ح} - \{\pm ٦\}$



① $(\text{أ}\,\text{ب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$

② $(\text{أ}^{-1}\,\text{ب}\,\text{جـ}^{-1})^{-1} = \text{جـ}\,\text{ب}^{-1}\,\text{أ}$

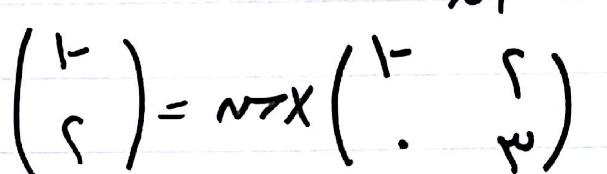
③ $\text{أ}^{-1}\,\text{أ} = I$

إذا كان $\text{أ}\,\text{ب} = I$ فإن $\text{أ} = \text{ب}^{-1}$

④ $\text{أ}\,\text{س} = \text{جـ} \Leftarrow \text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{جـ}$

⑤ $\text{س}\,\text{أ} = \text{جـ} \Leftarrow \text{س} = \text{جـ}\,\text{أ}^{-1}$

مثال ٣ أوجد المصفوفة التي تحقق أن:



$$\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}}_{\text{أ}} \times \text{س} = \begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$$

الحل

أ ⇐ المصفوفة قبل س

يبقى هنجيب المعكوس الضربي لها ونضربه قبل الطرف الثاني

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix} = (2\times 0) - (-1\times 3) = 3$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$



$$\because \text{س} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{pmatrix}0 + (\frac{1}{3}\times 3)\\ 1 + (\frac{2}{3}\times 3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

مثال ٤ إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ ، $\text{أ}\,\text{ب} = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 7\end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ب

الحل

$$\because \text{أ}\,\text{ب} = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

$$\text{ب} = \text{أ}^{-1}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

هنجيب المعكوس الضربي لـ (أ)

$$\Delta = \begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

← نبدل الرئيسي ونغير إشارة الفرعي

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}12+0 & -6+14\\ 4+0 & -2+14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

حل المعادلات باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

١ حل المعادلات الاتية باستخدام المصفوفات

$$٢س + ٣ص = ٧$$

$$س - ص = ١$$

الحل

المعادلة المصفوفية هى

أ سـ = ج

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix}$$

عشان المصفوفة أ تشيل سـ نضرب فى المعكوس الضربى لها تشيل الحدود المطلقة

$أ^{-١}$ ←

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = -٢ - ٣ = -٥$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٥} \begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{-١}{٥} \begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{-١}{٥} \begin{pmatrix} -٧-٣ \\ -٧+٢ \end{pmatrix} = \frac{-١}{٥} \begin{pmatrix} -١٠ \\ -٥ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ١

م.ح = {(٢ ، ١)}



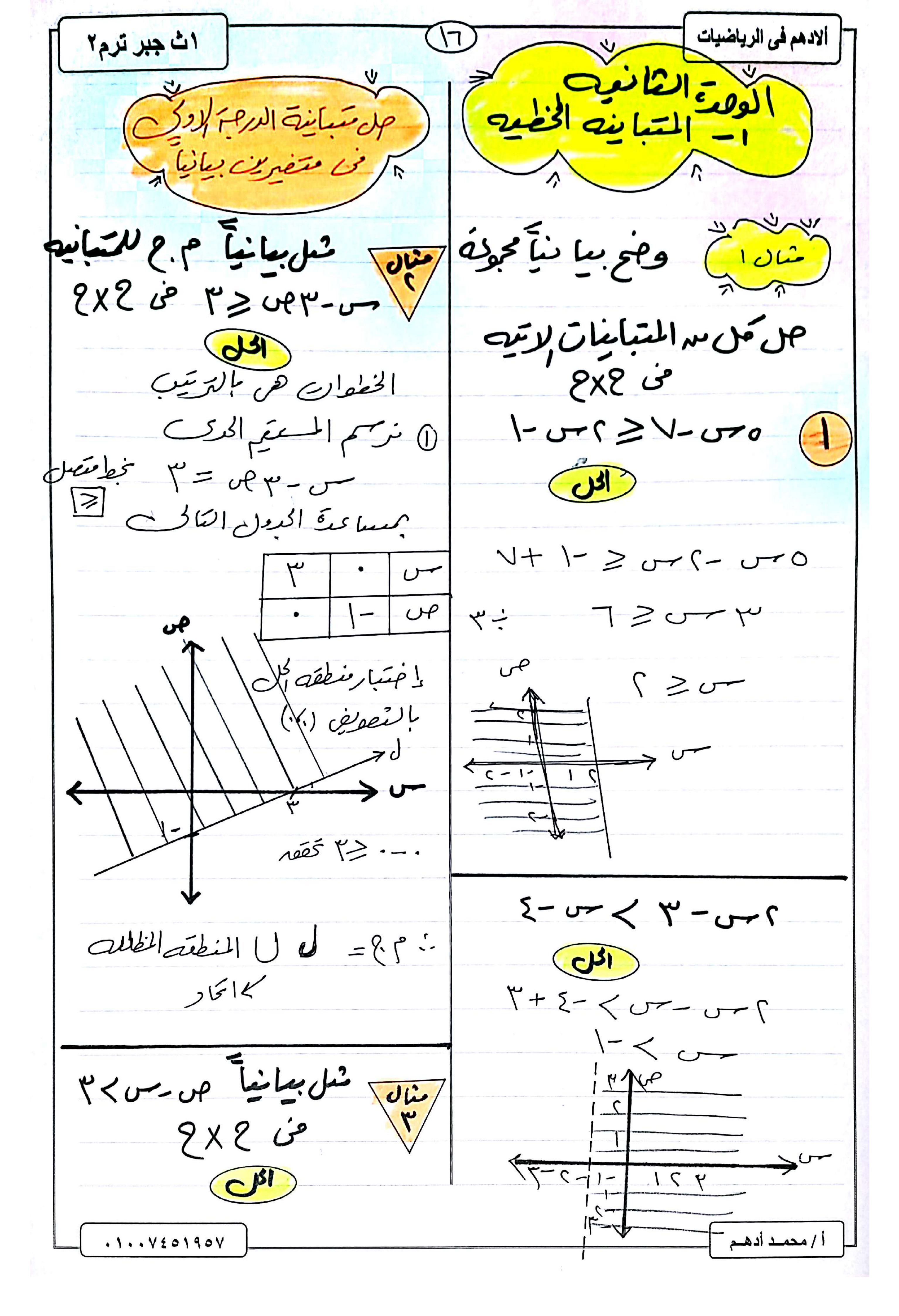
حل المعادلات الاتية باستخدام المصفوفات.

$$س = ٢ص - ١$$

$$٣ص = ٢س$$

الحل

حل انت



الوحدة الثانية
١- المتباينة الخطية

مثال ١ وضح بيانياً مجموعة حل كل من المتباينات الآتية في ح×ح

(١) ٥س - ٧ ≤ ٢س - ١

الحل

٥س - ٢س ≤ -١ + ٧

٣س ≤ ٦ ÷ ٣

س ≤ ٢

(٢) ٢س - ٣ > س - ٤

الحل

٢س - س > -٤ + ٣

س > -١

حل متباينة الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً

مثال ٢ مثل بيانياً م.ح للمتباينة س - ٣ص ≤ ٣ في ح×ح

الحل

الخطوات هي بالترتيب

(١) نرسم المستقيم الحدي

س - ٣ص = ٣ بخط متصل (≤)

بمساعدة الجدول التالي

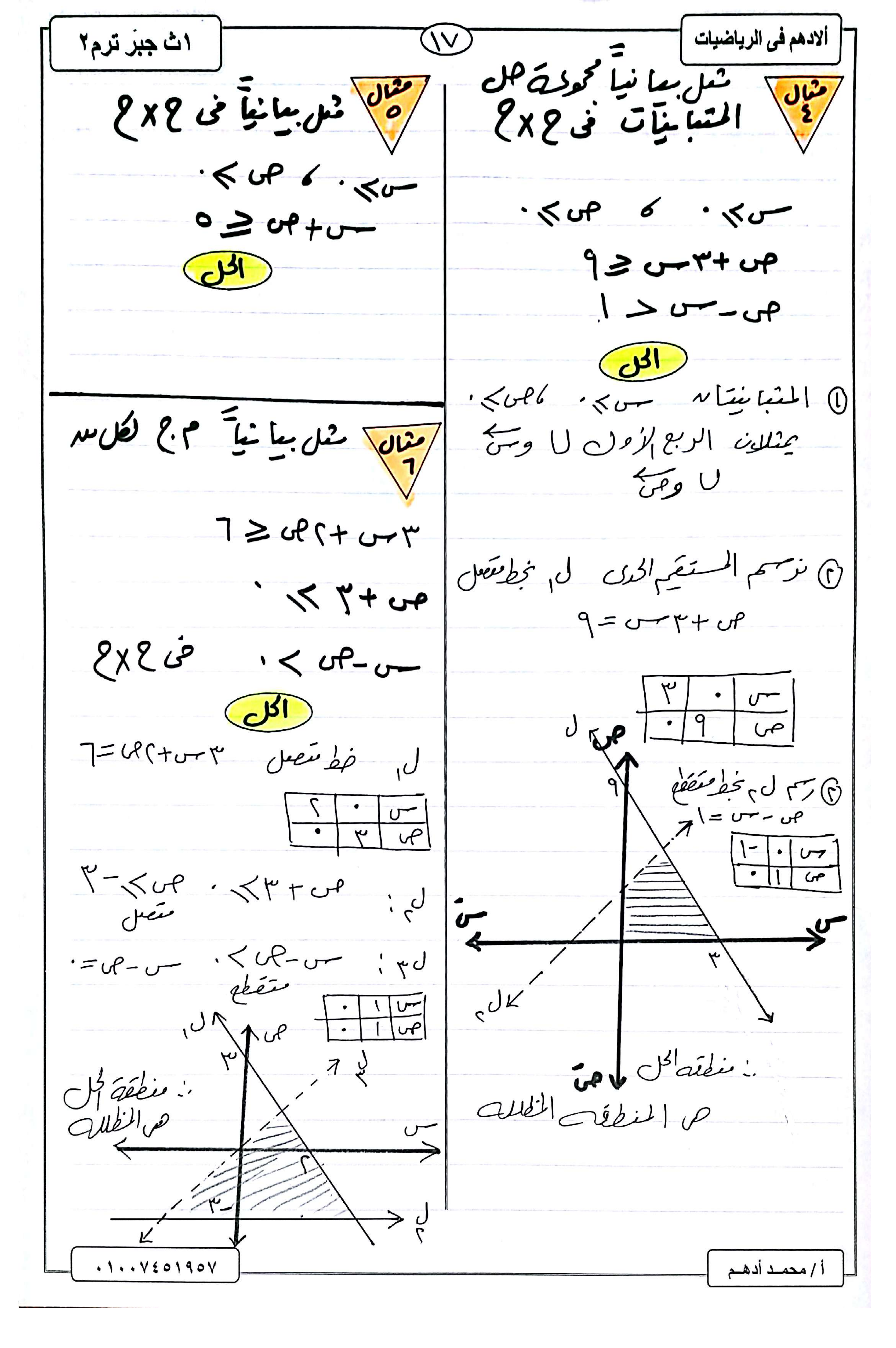
س	٠	٣
ص	-١	٠

∴ م.ح = ل ∪ المنطقة المظللة

↖ اتحاد

مثال ٣ مثل بيانياً ص - س > ٣ في ح×ح

الحل



مثال ٤

مثل بيانياً مجموعة حل المتباينات فى ح × ح

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

ص + ٣س ≤ ٩

ص − س < ١

الحل

① المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلان الربع الأول لـ وس→ و وص→

② نرسم المستقيم الحدى ل١ بخط متصل

ص + ٣س = ٩

س	٠	٣
ص	٩	٠

③ نرسم ل٢ بخط متقطع

ص − س = ١

س	٠	−١
ص	١	٠

منطقة الحل: هى المنطقة المظللة

مثال ٥

مثل بيانياً فى ح × ح

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

س + ص ≤ ٥

الحل

مثال ٦

مثل بيانياً م.ح لكل مما

٣س + ٢ص ≤ ٦

ص + ٣ ≥ ٠

س − ص > ٠ فى ح × ح

الحل

ل١ خط متصل ٣س + ٢ص = ٦

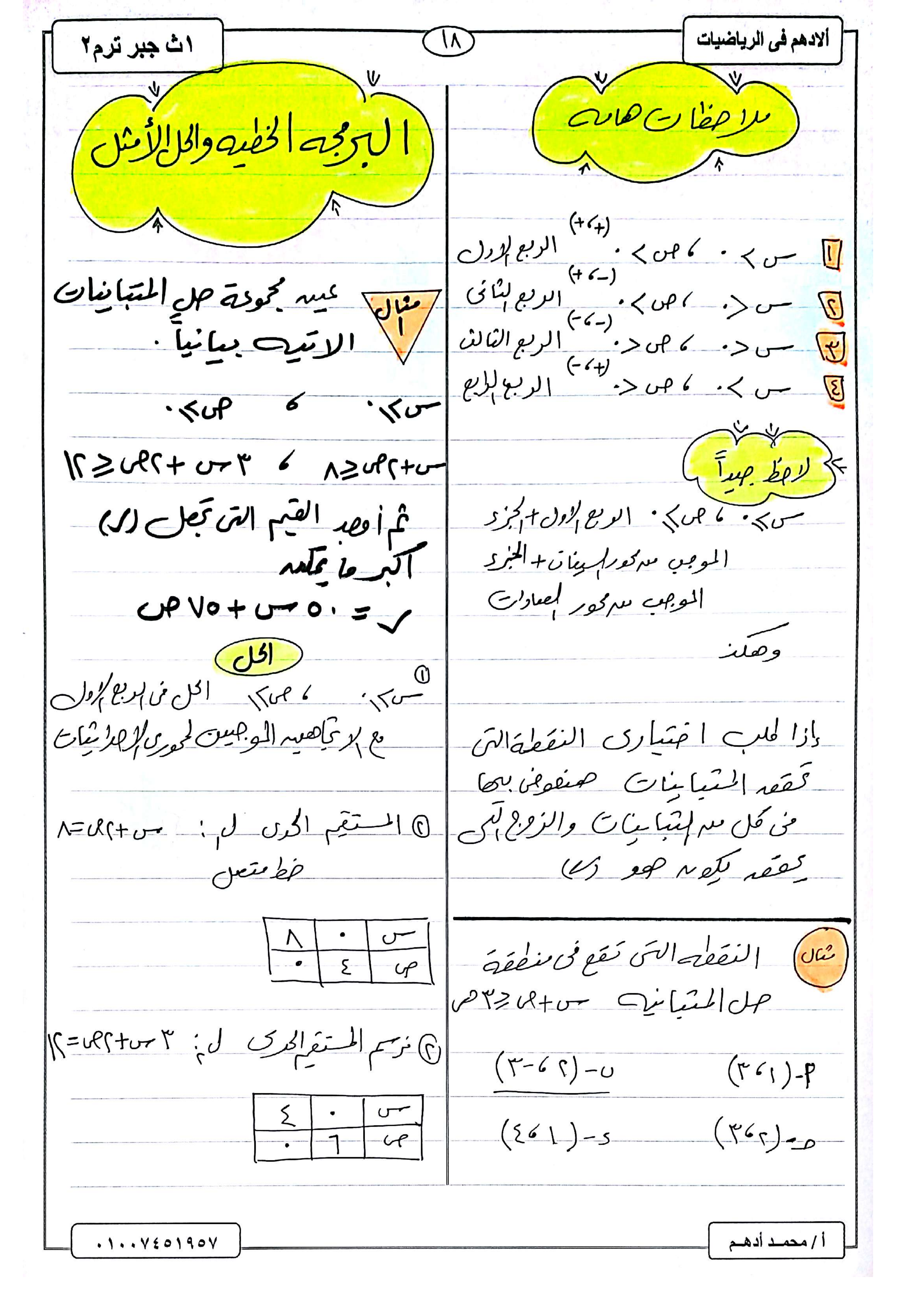
س	٠	٢
ص	٣	٠

ل٢ : ص + ٣ ≥ ٠ ، ص ≥ −٣ متصل

ل٣ : س − ص > ٠ ، س − ص = ٠ متقطع

س	١	٠
ص	١	٠

منطقة الحل: هى المظللة



ملاحظات هامة

١) س > ٠ ، ص > ٠ الربع الأول (+ ، +)

٢) س < ٠ ، ص > ٠ الربع الثانى (- ، +)

٣) س < ٠ ، ص < ٠ الربع الثالث (- ، -)

٤) س > ٠ ، ص < ٠ الربع الرابع (+ ، -)

لاحظ جيداً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ الربع الأول + الجزء الموجب من محور السينات + الجزء الموجب من محور الصادات

وهكذا

إذا طلب اختيار النقطة التى تحقق المتباينات صفوفى بها فى كل من المتباينات والزوج الذى يحقق يكون هو الحل

مثال

النقطة التى تقع فى منطقة حل المتباينة س + ص ≥ ٣ ص

أ- (١ ، ٣)   ب- (٢ ، -٣)

جـ- (٢ ، ٣)   د- (١ ، ٤)

البرمجة الخطية والحل الأمثل

مثال ١

عين مجموعة حل المتباينات الآتية بيانياً.

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

س + ٢ص ≤ ٨ ، ٣س + ٢ص ≤ ١٢

ثم أوجد القيم التى تجعل (ر) أكبر ما يمكن

ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

الحل

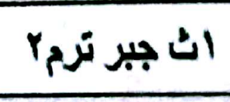
① س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ الحل فى الربع الأول مع الاتجاهين الموجبين لمحورى الاحداثيات

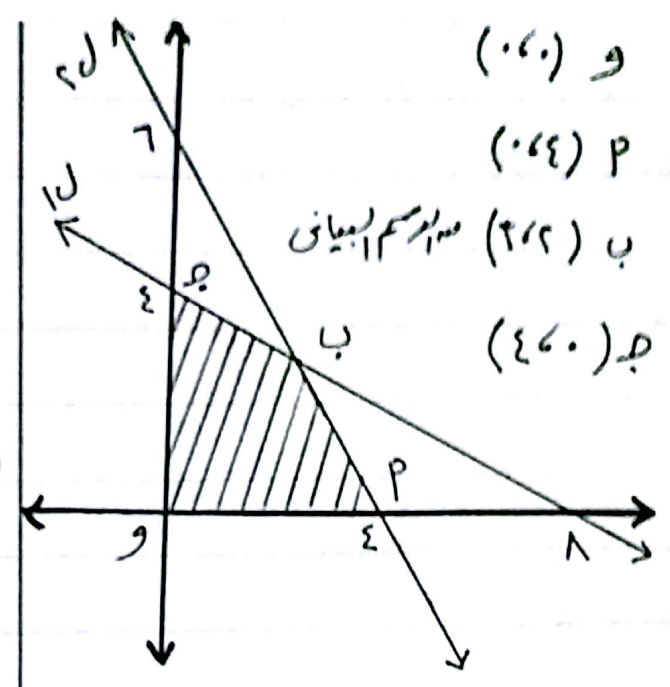
② المستقيم الحدى ل١ : س + ٢ص = ٨
خط متصل

س	٠	٨
ص	٤	٠

③ نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ٣س + ٢ص = ١٢

س	٠	٤
ص	٦	٠





هنعوض بكل نقطة منهم في دالة الهدف ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

ر[و] = ٥٠×٠ + ٧٥×٠ = ٠

ر[أ] = ٥٠×٤ + ٧٥×٠ = ٢٠٠

ر[ب] = ٥٠×٢ + ٧٥×٣ = ٣٢٥

ر[جـ] = ٥٠×٠ + ٧٥×٤ = ٣٠٠

أكبر قيمة لدالة الهدف = ٣٢٥ عند (٢،٣)

مثال

حل المتباينات

س + ص ≤ ٥

ص ≥ ١ ، س ≥ ٢

وأوجد القيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف أصغر ما يمكن

ر = ٢س + ٣ص

الحل

① نرسم المستقيم الحدي ل١ بخط متصل

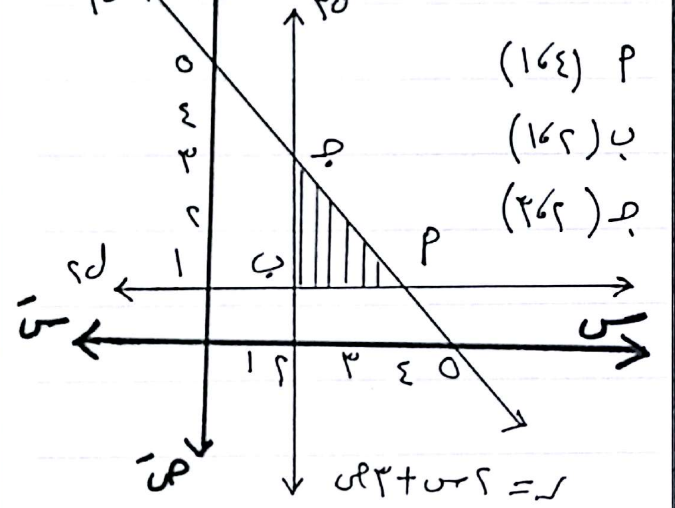
ل١ : س + ص = ٥

س	٠	٥
ص	٥	٠

② نرسم ل٢ بخط متصل ص = ١

خط يقطع محور الصادات عند ١ ويوازي محور السينات

③ ل٣ خط مستقيم يقطع السينات عند ٢ ويوازي محور الصادات



ر = ٢س + ٣ص

ر[أ] = ٢×٤ + ٣×١ = ١١

ر[ب] = ٢×٢ + ٣×١ = ٧

ر[جـ] = ٢×٢ + ٣×٣ = ١٣

أصغر قيمة لدالة الهدف = ٧ عند (٢،١)

ثانياً حساب المثلثات

الدرس الاول :
المتطابقات المثلثية.

الدرس الثانى :
حل المعادلات المثلثية .

الدرس الثالث :
زوايا الإرتفاع وزوايا الإنخفاض .

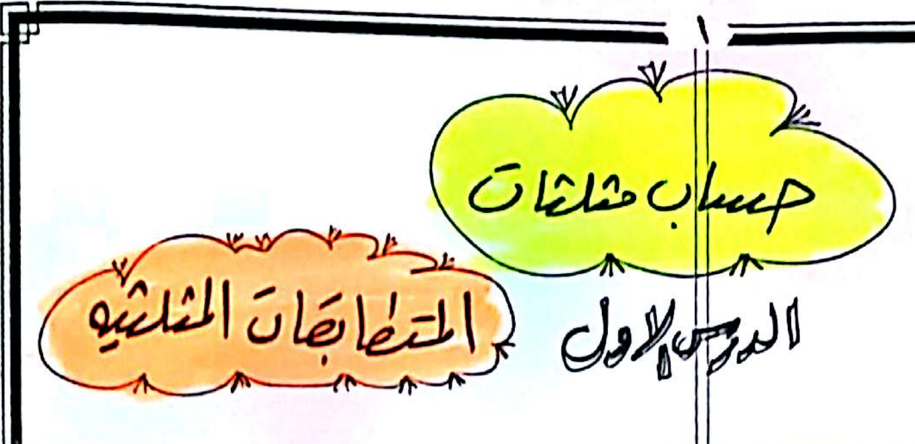
الدرس الرابع :
حل المثلث القائم الزاوية .

الدرس الخامس :
القطاع الدائرى .

الدرس السادس :
القطعة الدائرية

الدرس السابع :
المساحات





* الدوال المثلثيه ومقلوباتها

جتا θ = $\frac{1}{\text{قا}\,\theta}$ جا θ = $\frac{1}{\text{قتا}\,\theta}$

ظا θ = $\frac{1}{\text{ظتا}\,\theta}$

جتا θ × قا θ = ١ ، جا θ قتا θ = ١

ظا θ ظتا θ = ١

مثال (١) أوجد قيمة

[١] ٣ جا θ × ٢ قتا θ = ٣×٢×١ = ٦

[٢] ٥ جتا θ × ٤ قا θ = ٥×٤×١ = ٢٠

[٣] جا θ قتا θ + ظا θ ظتا θ =
١ + ١ = ٢

ظا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

ظتا θ = $\frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

* الزاوية (θ ، ٩٠ - θ)

جا(٩٠ - θ) = جتا θ قتا(٩٠ - θ) = قا θ

جتا(٩٠ - θ) = جا θ قا(٩٠ - θ) = قتا θ

ظا(٩٠ - θ) = ظتا θ ظتا(٩٠ - θ) = ظا θ

تغير ثنائي ((ت))

مثال (٢) أوجد قيمة

[١] قا θ جا(٩٠ - θ) = قا θ × جتا θ = ١

[٢] جتا θ قتا(٩٠ - θ) = جتا θ × قا θ = ١

* الزاوية (θ ، - θ) في الربع الرابع

جتا(- θ) = جتا θ قا(- θ) = قا θ

جا(- θ) = - جا θ قتا(- θ) = - قتا θ

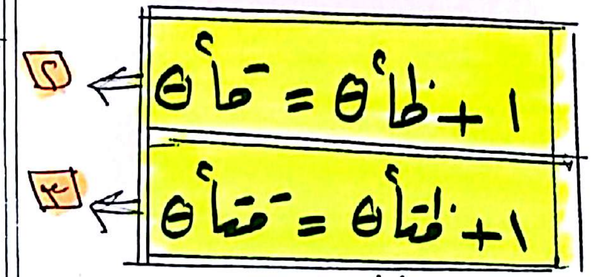
ظا(- θ) = - ظا θ ظتا(- θ) = - ظتا θ



(١) ← جا^2 θ + جتا^2 θ = ١

ومنها

* جا^2 θ = ١ − جتا^2 θ
* جتا^2 θ = ١ − جا^2 θ



(٢) ← ١ + ظا^2 θ = قا^2 θ

(٣) ← ١ + ظتا^2 θ = قتا^2 θ

ومنها

* قا^2 θ − ظا^2 θ = ١
* (قا θ − ظا θ)(قا θ + ظا θ) = ١
* قتا^2 θ − ١ = ظتا^2 θ
* ١ − قتا^2 θ = − ظتا^2 θ
* قتا^2 θ − ظتا^2 θ = ١
* (قتا θ − ظتا θ)(قتا θ + ظتا θ) = ١

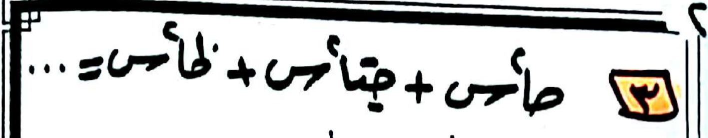
مثال (١) أوجد قيمة

(١) ١ + ظا^2 θ = قا^2 θ

(٢) إذا كان قا^2 θ = ٧

فإن ظا^2 θ = ...

ظا^2 θ = قا^2 θ − ١ = ٧ − ١ = ٦



(٣) جا^2 س + جتا^2 س + ظا^2 س = ...

١ + ظا^2 س = قا^2 س

(٤) جا^2 θ + جتا^2 θ − قتا^2 θ = ...

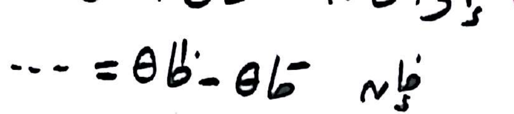
١ − قتا^2 θ = − ظتا^2 θ

(٥) إذا كان ظا^2 θ = ٣

فإن قا^2 θ = ...

قا^2 θ = ١ + ظا^2 θ

= ١ + ٣ = ٤



(٦) إذا كان قا θ + ظا θ = ٤

فإن قا θ − ظا θ = ...

قا^2 θ − ظا^2 θ = ١

(قا θ − ظا θ)(قا θ + ظا θ) = ١
  ٤

(قا θ − ظا θ) = $\frac{١}{٤}$

(٧) إذا كان قا س − ظا س = $\frac{٤}{٥}$

فإن قا س + ظا س = ...

الحل

٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

اثبت صحة المتطابقات التالية

١ ظا س + ظتا س = قا س قتا س

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} + \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

= $\frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جتا س جا س}} = \frac{1}{\text{جتا س جا س}}$

= $\frac{1}{\text{جتا س}} \times \frac{1}{\text{جا س}}$ = قا س قتا س

= الطرف الأيسر

٢ $\frac{1 + \text{ظا}^2\theta}{\text{قا}^4\theta} = 1 - \text{جا}^2\theta$

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{\text{قا}^2\theta}{\text{قا}^4\theta} = \frac{\text{قا}^2\theta}{\text{قا}^2\theta\ \text{قا}^2\theta}$

$\left(\frac{1}{\text{قا}^2\theta}\right) = \text{جتا}^2\theta$

الطرف الأيسر = $\text{جتا}^2\theta$

∴ الطرفان متساويان

٣ $\text{ظا}^2\theta - \text{جا}^2\theta = \text{ظا}^2\theta\ \text{جا}^2\theta$

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} - \text{جا}^2\theta$

= $\frac{\text{جا}^2\theta - \text{جا}^2\theta\ \text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}$

= $\frac{\text{جا}^2\theta(1 - \text{جتا}^2\theta)}{\text{جتا}^2\theta} = \text{ظا}^2\theta\ \text{جا}^2\theta$

= الطرف الأيسر

٤ $\frac{1 - \text{ظتا}^2\theta}{1 + \text{ظتا}^2\theta} = 2\text{جا}^2\theta - 1$

الحل

الطرف الأيمن = $\left(1 - \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}\right) \div \left(\text{قتا}^2\theta\right)$

$\left(\frac{\text{جا}^2\theta - \text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}\right) \div \left(\frac{1}{\text{جا}^2\theta}\right)$

= $\frac{\text{جا}^2\theta - \text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} \times \frac{\text{جا}^2\theta}{1}$

= $\text{جا}^2\theta - \text{جتا}^2\theta$

∵ $\text{جتا}^2\theta = 1 - \text{جا}^2\theta$

∴ $\text{جا}^2\theta - [1 - \text{جا}^2\theta]$

$\text{جا}^2\theta - 1 + \text{جا}^2\theta = 2\text{جا}^2\theta - 1$

= الطرف الأيسر

٥ $\text{جا}^4\theta - \text{جتا}^4\theta = 1 - 2\text{جتا}^2\theta$

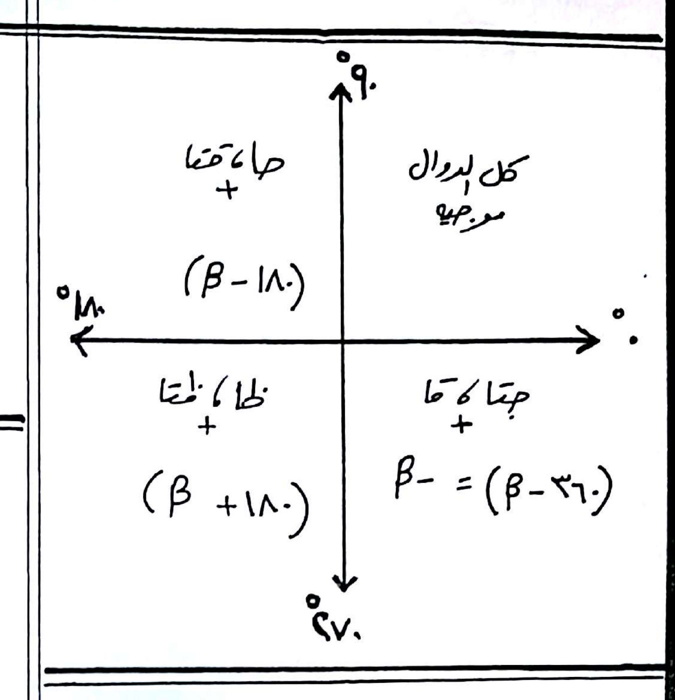
الحل





الدرس الثاني

حل المعادلات المثلثيه



(١) الحل العام للمعادله جا $\theta = P$

هو $\theta = \beta + 2n\pi$ ، $\theta = (\pi - \beta) + 2n\pi$

(٢) الحل العام للمعادله جتا $\theta = P$

هو $\theta = \pm\beta + 2n\pi$

(٣) الحل العام للمعادله ظا $\theta = P$

هو $\theta = \beta + n\pi$

مثال (١) أوجد الحل العام للمعادله

جتا $\theta = \frac{1}{2}$

الحل

جتا $\theta = (\frac{1}{2})$ موجبه ∴ θ تقع في

الربع الأول $\theta = 60°$

$60°$

الربع الرابع

$\theta = 360 - 60 = 300°$

وهي تكافئ $(-60°)$

∴ الحل العام $\theta = \pm 60 + 2n\pi$

مثال (٢) أوجد الحل العام للمعادله

2 جا $\theta - \sqrt{2} = 0$

الحل

2 جا $\theta = \sqrt{2}$ جا $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

shiftsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴ $\theta = 45°$

جا موجبه

الأول $\theta = 45°$

الثاني $\theta = 180 - 45° = 135°$

∴ الحل العام $\theta = 45 + 2n\pi$

$\theta = 135 + 2n\pi$

تمرين أوجد الحل العام للمعادله

$\sqrt{3}$ ظا $\theta - 1 = 0$

الحل

٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧
أ/ محمد أدهم

الحل العام للزوايا الربعيه

المعادله	الحل العام
جا θ = ٠	θ = ن π
جا θ = ١	$\theta = \frac{\pi}{2}$ + ٢ن π
جا θ = -١	$\theta = \frac{3\pi}{2}$ + ٢ن π
جتا θ = ٠	$\theta = \frac{\pi}{2}$ + ن π
جتا θ = ١	θ = ٢ن π
جتا θ = -١	$\theta = \pi$ + ٢ن π

مثال (١) اوجد الحل العام لـ ظتا θ + ١ = ٠

الحل

ظتا θ = -١

∴ ظا θ = -١ (سالبه) θ = ٤٥

الثاني   الرابع

θ = ١٨٠ - ٤٥ = ١٣٥° θ = ٣٦٠ - ٤٥ = ٣١٥°

∴ أصغر قياس موجب يحقق المعادله ١٣٥°

∴ الحل العام هو θ = ١٣٥ + ن π حيث ن ∈ ص

مثال (٢) جا θ جتا θ = ½ جا θ

الحل

جا θ جتا θ - ½ جا θ = ٠

جا θ (جتا θ - ½) = ٠

إما جا θ = ٠

∴ θ = ن π

أو جتا θ - ½ = ٠

جتا θ = ½ موجبه θ = ٦٠°

الرابع (-٦٠°)   الأول (٦٠)

: θ = ± ٦٠ + ٢ن π

∴ الحل العام هو θ = ن π

، θ = ± $\frac{\pi}{3}$ + ٢ن π

حيث ن ∈ ص

تمرين أوجد الحل العام للمعادله

٢ جا θ جتا θ - $\sqrt{3}$ جا θ = ٠

الحل

حل المعادله المثلثيه في الفتره [٠ ، ٢π[

(١) حل المعادله $\sqrt{2}$ قا θ - ٢ = ٠

حيث θ ∈ [٠ ، ٢π[

الحل

$\sqrt{2}$ قا θ = ٢

قا θ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$

∴ جتا θ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (موجبه) θ = ٤٥°

الأول   الرابع

٣٦٠ - ٤٥° = ١٣٥°

∴ م.ح = {٤٥° ، ٣١٥°}

② 4 جا$^2\theta$ − 3 جاθ جتاθ = 0

حيث $\theta \in [0 , 2\pi[$

الحل

جاθ (4 جاθ − 3 جتاθ) = 0

∴ إما جاθ = 0 ومنها

$\theta = 0°$ أو $\theta = 180°$

أو 4 جاθ − 3 جتاθ = 0

4 جاθ = 3 جتاθ

$\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{3}{4}$

ظاθ = $\frac{3}{4}$ (موجبة)

$\theta = 36° \; 52'$

الأول

$\theta = 36° \; 52'$

الثالث

$\theta = 180 + 36° \; 52'$

$= 216° \; 52'$

∴ م.ح = {0 ، $180°$ ، $36° \; 52'$ ، $216° \; 52'$}

تدريب أوجد مجموعة حل المعادلة

4 جتا$^2\theta$ − 3 = 0

حيث $\theta \in [0 , 2\pi[$

الحل

③ حل المعادلة

جاθ جتاθ − $\frac{1}{2}$ جتاθ = 0

$0° < \theta < 180°$

الحل

جتاθ (جاθ − $\frac{1}{2}$) = 0

إما جتاθ = 0

∴ $\theta = 90°$

أو $\theta = 270°$ مرفوض

أو جاθ − $\frac{1}{2}$ = 0

جاθ = $\frac{1}{2}$ موجبة

∴ الأول

$\theta = 30°$

الثاني

$\theta = 30°$

$\theta = 180 - 30 = 150°$

∴ م.ح = {$90°$ ، $30°$ ، $150°$}

تدريب حل المعادلة من الفترة $[0 , \pi[$

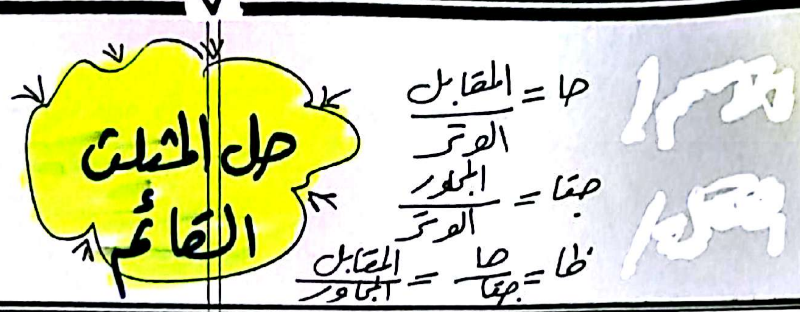
2 جا$^2\theta$ − 5 جاθ + 2 = 0

الحل

01007451957

أ/ محمد أدهم

حساب مثلثات



المقصود بحل المثلث

هو إيجاد المجهول من عناصره الستة

[٣ أضلاع - ٣ زوايا]

طرق حل المثلث القائم

(١) اذا علم طولا ضلعيه

(١) ايجاد الضلع الثالث من فيثاغورث

(٢) نحسب احدى الزاويتين عن طريق الدوال المثلثية

(٣) الزاوية الثالثة = ٩٠ − [الحادة]

مثال (١) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب الذي فيه

أب = ٨سم ، ب جـ = ١٢سم

الحل

أ، ب، جـ، ٨سم، ١٢سم، ?، ?، ?

أجـ = $\sqrt{(\text{ب جـ})^2 + (\text{أب})^2}$

= $\sqrt{12^2 + 8^2}$

= ١٤,٤٢ سم

∵ ظا جـ = المقابل = أب / المجاور = ب جـ = $\frac{8}{12}$

∴ ق($\hat{جـ}$) = shift tan $\frac{8}{12}$ = ٢٤″ ٤١′ ٣٣°

، ق($\hat{أ}$) = ٩٠° − ٢٤″ ٤١′ ٣٣° = ٣٦″ ١٨′ ٥٦°

تدريب (١) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب الذي فيه

أب = ٤سم ، ب جـ = ٦سم

مقرباً الزوايا لأقرب درجة والأطوال لأقرب سم

الحل

ثانياً: إذا علم طول ضلع وقياس زاوية حادة

(١) نحسب قياس الزاوية الثالثة

$=$ (٩٠ − الحادة)

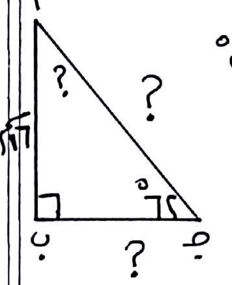
(٢) نوجد طول الضلعين الآخرين كالتالي

النسبة المثلثية للزاوية = $\dfrac{\text{طول الضلع المطلوب}}{\text{طول الضلع المعلوم}}$

مثال (١) مثال أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه ق(∠ج) = ٦٢° ، أ ب = ١٦ سم

حل المثلث مقرباً الناتج لرقمين عشريين

الحل



ق(∠أ) = ٩٠° − ٦٢° = ٢٨°

∵ ظا ج = $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$

∴ ب ج = $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ظا ج}}$

ب ج = $\dfrac{١٦}{\text{ظا ٦٢°}}$ = ٨٫٥١ سم

أ ج = $\sqrt{(\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2}$

= $\sqrt{(١٦)^2 + (٨٫٥١)^2}$

≃ ١٨٫١٢ سم

تمرين في الشكل المقابل أوجد لأقرب رقم عشري

حل المثلث

أ ، ب ، ج ، ٦٠ سم ، ٤٠°

الحل

الدرس الرابع: زوايا الارتفاع والانخفاض

زاوية الارتفاع أو الانخفاض:

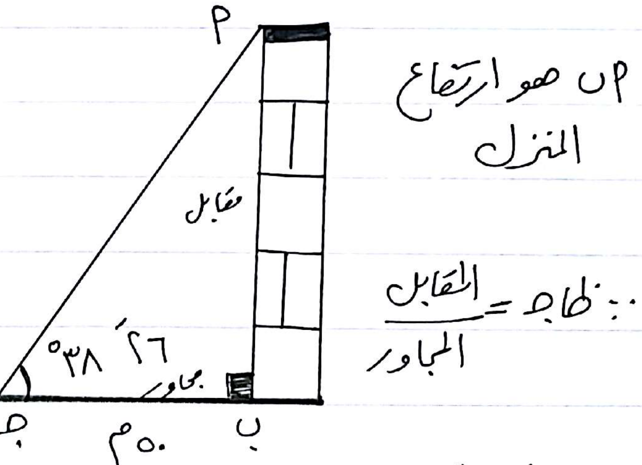
هى اتحاد الشعاع الأفقى للراصد مع الشعاع البادئ من الراصد ماراً بالجسم المرصود.

زاوية انخفاض

زاوية ارتفاع

مثال من نقطة على سطح الارض تبعد ٥٠ م عن قاعدة منزل رصد شخص قمة المنزل فوجد ان قياس زاوية ارتفاعها ٢٦ ٣٨° أوجد ارتفاع المنزل لأقرب م

الحل



أب هو ارتفاع المنزل

∴ ظا جـ = المقابل / المجاور

ظا ٢٦ ٣٨° = أب / ٥٠

∴ أب = ٥٠ × ظا ٢٦ ٣٨°

≃ ٤٠ متر

∴ ارتفاع المنزل = ٤٠ متر تقريباً

مثال طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ م فإذا كان الخيط يصنع زاوية ٦٣° مع الارض الافقية فأوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الارض

الحل

الطائرة ← جـ

طول الخيط ٤٢ م

وتر

مقابل

ارتفاع الطائرة عن الارض

٦٣°

أ   مجاور   ب

جا أ = المقابل / الوتر

جا ٦٣° = ب جـ / ٤٢

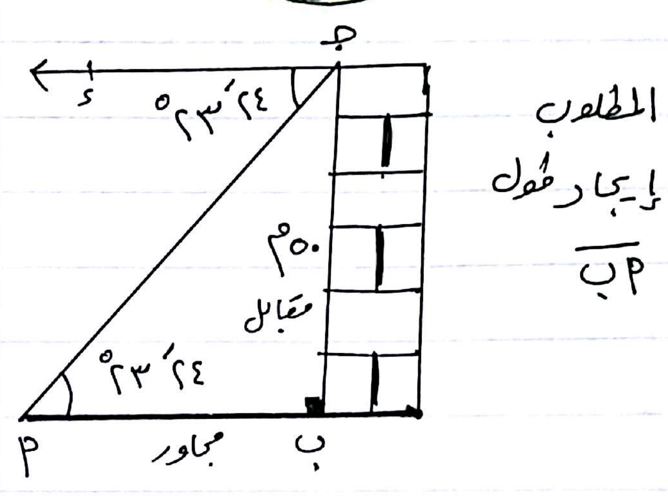
∴ ب جـ = ٤٢ جا ٦٣° ≃ ٣٧ متر

تدريب رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠ م فوجد ان قياس زاوية ارتفاعها ١٧ ٢٥° أوجد بعد الراصد عن الطائرة.

مثال ٤

من قمة برج ارتفاعه ٥٠ متراً وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج ٢٤َ ٢٣° أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج

الحل



المطلوب إيجاد طول أب

∵ ظا أ = ب جـ / أ ب

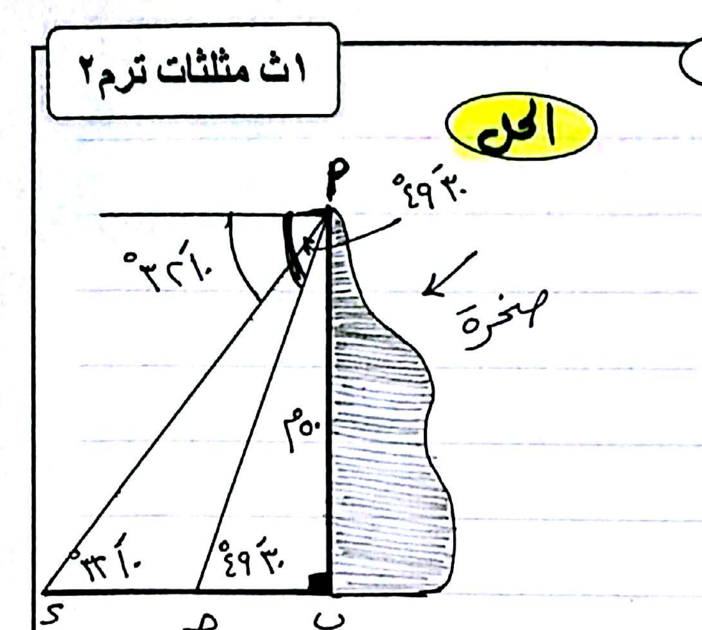
ظا ٢٤َ ٢٣° = ٥٠ / أ ب ←→ صنبدل

أ ب = ٥٠ / ظا ٢٤َ ٢٣° ≃ ١١٦ م

مثال ٥

من قمة صخرة ارتفاعها ٥٠م رصد شخص سفينتين في البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة فوجد أن قياس زاويتي انخفاضهما ١٠َ ٣٢° ، ٣٠َ ٤٩° أوجد البعد بين السفينتين.

الحل



نحسب ب جـ ونحسب ب د ونطرحهم

ظا ٣٠َ ٤٩° = ٥٠ / ب جـ

∴ ب جـ = ٥٠ / ظا ٣٠َ ٤٩° ≃ ٤٢,٧ م

بالمثل ظا ١٠َ ٣٢° = ٥٠ / ب د

∴ ب د = ٥٠ / ظا ١٠َ ٣٢° ≃ ٧٩,٥ م

∴ البعد بين السفينتين = ٧٩,٥ − ٤٢,٧

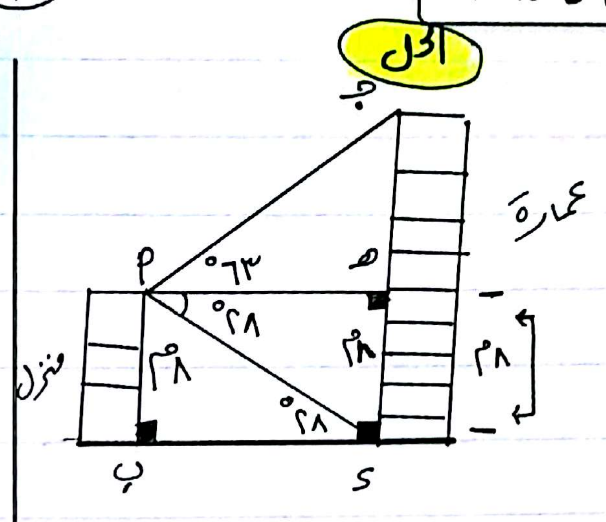
= ٣٦,٨ م تقريباً

مثال ٦

من سطح منزل ارتفاعه ٢٨م رصد شخص زاوية ارتفاع قمة عمارة فوجدها ٦٣° ورصد زاوية انخفاض قاعدتها فوجدها ٢٨° أوجد ارتفاع العمارة لأقرب متر

الحل

الحل



نفرض أن أب يمثل المنزل

، هـ د يمثل العمارة

∵ هـ د = أب = ٨ م

∴ في △ أ هـ د

ظا ٢٨° = $\frac{٨}{أهـ}$

∴ أ هـ = $\frac{٨}{ظا ٢٨}$ ≃ ١٥ م

في △ أ هـ جـ ∵ ظا ٦٣° = $\frac{هـ جـ}{١٥}$

∴ هـ جـ = ١٥ ظا ٦٣° = ٢٩ م

∴ ارتفاع العمارة

= ٢٩ + ٨ = ٣٧ متر تقريباً

مثال ٣

وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٤٠ م ولاحظ سفينتين في البحر على شعاع أفقي واحد من قاعدة الصخرة وكان قياسي زاويتي انخفاضهما فوجدهما ١٢َ ٣٥° ، ٦َ ٥٣° أوجد البعد بينهما لأقرب متر

الحل

اتفضل حل

الدرس الخامس : القطاع الدائرى

قطاع أكبر

قطاع أصغر

هو جزء من سطح دائرة محدود بقوس ونصفى قطرين فيها

قوانين مساحة القطاع

١) $\frac{1}{2}$ نق² $\theta^{د}$ ← الزاوية بالدائرى

٢) $\frac{1}{2}$ ل نق

٣) $\frac{س^\circ}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة

= $\frac{س^\circ}{٣٦٠} \times \pi$ نق² ← الزاوية بالستينى

محيط القطاع = ٢ نق + ل


مثال ١ أوجد مساحة القطاع فى كل من الحالات التالية

١) نق = ١٠ سم ، $\theta^{د}$ = ١٫٢^د

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق² $\theta^{د}$

= $\frac{1}{2}$ × (١٠)² × ١٫٢ = ٦٠ سم²

٢) س° = ٩٠° ، نق = ١٢ سم

الحل

المساحة = $\frac{س^\circ}{٣٦٠} \times \pi$ نق²

= $\frac{٩٠}{٣٦٠} \times \pi \times (١٢)^2 \simeq$ ١١٣٫١ سم²

٣) نق = ٦ سم ، ل = ٤ سم

الحل

المساحة = $\frac{1}{2}$ × ل × نق = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٤

= ١٢ سم²

مثال ٢ قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢ سم ومحيطه ٥٥ سم أوجد مساحته.

الحل

نق = ١٢ ∵ المحيط = ٢نق + ل

∴ ٢نق + ل = ٥٥

٢ × ١٢ + ل = ٥٥

٢٤ + ل = ٥٥

∴ ل = ٥٥ − ٢٤ = ٣١ سم

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ٣١ × ١٢

= ١٨٦ سم²

تدريب

قطاع دائري طول قوسه ٧سم ومحيطه ٢٥سم أوجد مساحته.

الحل

مثال ٣

قطاع دائري مساحته = ٢٧٠ سم² وطول قطر الدائرة = ٣٠سم أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته المركزية بالدائري

الحل

المساحة = ٢٧٠سم²

نق = $\frac{٣٠}{٢}$ = ١٥سم ، ل = ؟

(١) ∴ $\frac{1}{2}$ ل نق = ٢٧٠

$\frac{1}{2}$ × ل × ١٥ = ٢٧٠

٧٫٥ ل = ٢٧٠

ل = $\frac{٢٧٠}{٧٫٥}$ = ٣٦سم

(٢) $\frac{1}{2}$ نق² $\theta^{ء}$ = ٢٧٠

$\frac{1}{2}$ × (١٥)² $\theta^{ء}$ = ٢٧٠

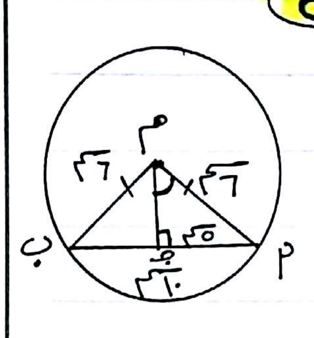
١١٢٫٥ $\theta^{ء}$ = ٢٧٠

$\theta^{ء}$ = $\frac{٢٧٠}{١١٢٫٥}$ = ٢٫٤ء

مثال ٤

دائرة م فيها نق = ٦سم رسم $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ بحيث أب = ١٠سم أوجد مساحة القطاع الأصغر م أ ب

الحل



نرسم $\overline{مجـ}$ ⊥ $\overline{أب}$

∴ جـ منتصف $\overline{أب}$

∴ أجـ = ٥سم

ق(أ $\hat{م}$ جـ) ⇐

جا(أ $\hat{م}$ جـ) = $\frac{٥}{٦}$ shift sin $(\frac{5}{6})$

∴ ق(أ $\hat{م}$ جـ) = ٣٤ً ٢٦َ ٥٦° ×٢

∴ ق(أ $\hat{م}$ ب) = ٨ً ٥٣َ ١١٢°

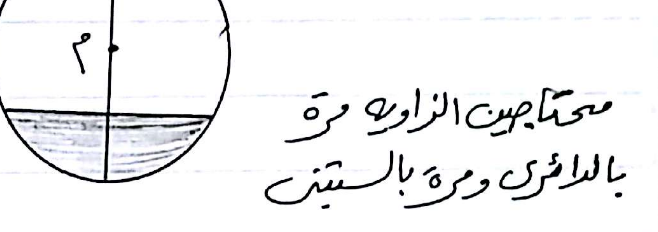
∴ مساحة القطاع = $\frac{س°}{٣٦٠}$ × π نق²

= $\frac{٨ً ٥٣َ ١١٢°}{٣٦٠°}$ × π × (٦)²

≃ ٣٥٫٤٦ سم²

الدرس السادس: القطعة الدائرية

هي جزء من سطح دائرة محدود بقوس فيها ووتر



محتاجين الزاوية مرة بالدائري ومرة بالستيني

مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{1}{2}\,\text{نق}^2\,(\theta^{\text{د}} - \text{جا}\,\theta)$

عايزينه الزاوية بالدائري

محيط القطعة الدائرية

= طول قوسها + طول وترها

$\theta^{\text{د}} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$

مثال ١

أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم، وقياس زاويتها المركزية ١٢٠°

الحل

$\theta^{\text{د}} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\pi}{180} = 120 \times \frac{\pi}{180}$

$= 2.094^{\text{د}}$

∴ مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{1}{2}\,\text{نق}^2\,(\theta^{\text{د}} - \text{جا}\,\theta)$

$= \frac{1}{2} \times 8^2\,(2.094^{\text{د}} - \text{جا}\,120^{\circ}) \simeq 39.3\ \text{سم}^2$

مثال ٢

أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطرها = ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ١٫٠٢ د مقرباً الناتج لرقمين عشريين

الحل

$\text{س}^{\circ} = \theta^{\text{د}} \times \frac{180}{\pi}$

$\text{س}^{\circ} = 1.02 \times \frac{180}{\pi} = 58^{\circ}\ 26'\ 30''$

∴ مساحة القطعة $= \frac{1}{2}\,\text{نق}^2\,(\theta^{\text{د}} - \text{جا}\,\theta)$

$= \frac{1}{2} \times (10)^2\,(1.02^{\text{د}} - \text{جا}\,58^{\circ}\ 26'\ 30'') \simeq 8.39\ \text{سم}^2$

مثال ٣

قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٢ سم وطول قوسها ٢٤ سم أوجد مساحتها

الحل

$\theta^{\text{د}} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{24}{12} = 2^{\text{د}}$

$\text{س}^{\circ} = \theta^{\text{د}} \times \frac{180}{\pi} = 2 \times \frac{180}{\pi} =$

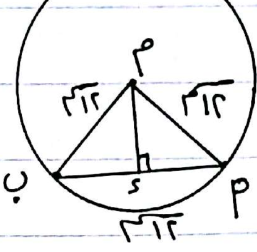
$= 114^{\circ}\ 35'\ 29''$

∴ المساحة $= \frac{1}{2}\,\text{نق}^2\,(\theta^{\text{د}} - \text{جا}\,\theta)$

$= \frac{1}{2} \times (12)^2\,(2^{\text{د}} - \text{جا}\,114^{\circ}\ 35'\ 29'') \simeq 78.53\ \text{سم}^2$

مثال ٤ أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التي طول وترها يساوي طول نصف قطر دائرتها = ١٢ سم

الحل



∵ م أ ب مثلث متساوي الأضلاع

∴ ق(أ م̂ ب) = ٦٠°

∴ ق(أ م̂ ب) المنعكسة = ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠°

$\theta^{ء} = ٣٠٠ \times \frac{\pi}{١٨٠}$

∴ مساحة القطعة الكبرى

$= \frac{1}{2}$ نق² (θ^ء − جا θ)

$= \frac{1}{2} \times (١٢)^2 \left(\frac{٣٠٠ \times \pi}{١٨٠} - \text{جا } ٣٠٠\right)$

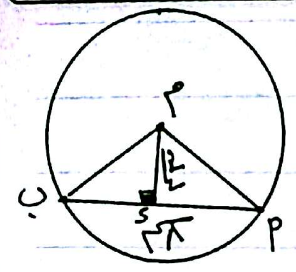
= ٤٣٩ سم²

مثال ٥ وتر في دائرة طوله ٨ سم على بعد ٣ سم من مركزها أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة.

الحل

∆ م أ ب متساوي الساقين ، م ء ينصف أب

∴ أ ء = ٤ سم



م أ = $\sqrt{٣^2 + ٤^2}$ = ٥ سم

∴ ظا أ م ء = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق(أ م̂ ء) = ٥٣° ٨َ

∴ ق(أ م̂ ب) = ١٠٦° ١٦َ

$\theta^{ء} = ١٠٦° ١٦َ \times \frac{\pi}{١٨٠}$

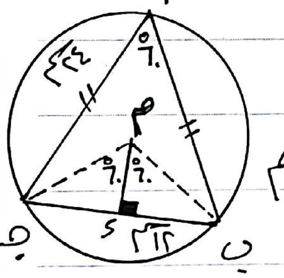
∴ المساحة = $\frac{1}{2}$ نق² (θ^ء − جا θ)

$= \frac{1}{2} \times ٥^2 \times \left(١٦َ ١٠٦° \times \frac{\pi}{١٨٠} - \text{جا } ١٠٦° ١٦َ\right)$

≃ ١١ سم²

مثال ٦ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم ، رسمت دائرة برؤوسه ، أوجد طول نصف قطر الدائرة ، ثم أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التي وترها ب جـ

الحل



∵ جا (ب م ء) = $\frac{١٢}{\text{نق}}$

∴ نق = $\frac{١٢}{\text{جا } ٦٠}$ = ٨√٣ سم

∴ مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{1}{2} \times ١٩٢ \left(\frac{١٢٠ \times \pi}{١٨٠} - \text{جا } ١٢٠\right)$

≃ ١١٨ سم²

الدرس السابع: المساحات

مساحة المثلث

(١) $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

(٢) $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

(٣) √ ح (ح − أ ب) (ح − ب ج) (ح − ج أ)

حيث ح = نصف المحيط

(٤) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س²

حيث س طول ضلع المثلث

مثال ١: أوجد مساحة المثلث أ ب ج فى كل من الحالات الآتية

(١) أ ب = ١٢ سم ، ب ج = ١٥ سم

ق($\hat{ب}$) = ٩٠°

الحل

$\frac{1}{2}$ أ ب × ب ج = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١٥ = ٩٠ سم²

(٢) أ ب = ١١ سم ، ب ج = ١٠ سم

ق($\hat{ب}$) = ٤٧°

الحل

$\frac{1}{2}$ × ١١ × ١٠ × جا ٤٧ ≃ ٤٠,٢٢ سم²

(٣) أ ب = ٥ سم ، ب ج = ٣ سم

أ ج = ٤ سم

الحل

ح = (٥ + ٣ + ٤) / ٢ = ٦

م Δ = √ ح (ح − أ ب) (ح − ب ج) (ح − ج أ)

= √ ٦ (٦ − ٥) (٦ − ٣) (٦ − ٤)

= √ ٦ × ١ × ٣ × ٢ = ٦ سم²

مساحة الشكل الرباعى

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة

مثال ٢: أوجد مساحة الشكل الرباعى طولا قطريه ١٠ سم ، ١٢ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٢°

الحل

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ١٢ × جا ٦٢° ≃ ٥٢,٩٨ سم²

* مساحة المربع
= $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره

* مساحة المعين
= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه

المضلع المنتظم

١) اضلاعه متساويه فى الطول
٢) زوايا متساوية فى القياس
٣) مجموع قياسات زوايا مضلع
= (ن-٢) × ١٨٠
٤) قياس كل زاويه = $\frac{(ن-٢) \times ١٨٠}{ن}$

مساحة المضلع المنتظم

= $\frac{1}{٤}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$

عدد الاضلاع ← ن ، طول الضلع ← س ، $\frac{1}{ظا \frac{\pi}{ن}}$ ← ظتا $\frac{\pi}{ن}$

مثال ٣ أوجد مساحة ثماني منتظم طول ضلعه = ٧ سم

الحل

ن = ٨ س = ٧

المساحه = $\frac{1}{٤}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$

= $\frac{1}{٤} \times ٨ \times ٧^2 \times \frac{1}{ظا(\frac{١٨٠}{٨})}$ ≃ ٢٣٦,٥٩ سم²

أوجد مساحة سداسى منتظم طول ضلعه ١٢ سم

الحل

ن = ٦ س = ١٢

$\frac{1}{٤}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$

$\frac{1}{٤} \times ٦ \times (١٢)^2 \times \frac{1}{ظا(\frac{١٨٠}{٦})}$ ≃ ٣٧٤,١٢ سم²

مثال ٤ مثلث متساوى الأضلاع مساحته ٣٦√٣ سم² أوجد طول ضلعه

$\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س² = ٣٦√٣

س² = ٣٦ × ٤ س² = ١٤٤

س = ١٢ سم

انتهى بفضل الله الجبر وحساب المثلثات
عقبال الهندسة